Correction du devoir maison $n°11$

1. Soit f un endomorphisme nilpotent de E, $\exists n \in \mathbb{N}, f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$. L'ensemble $\{k \in \mathbb{N}, f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ non vide (car il contient n) donc il admet un minimum.
2. (a) Soit (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & f((x_1,y_1,z_1)+\lambda(x_2,y_2,z_2)) = f(x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2) \\ & \quad = (2(x_1+\lambda x_2)+(y_1+\lambda y_2), -3(x_1+\lambda x_2)-(y_1+\lambda y_2)+z_1+\lambda z_2, x_1+\lambda x_2-(z_1+\lambda z_2)) \\ & \quad = (2x_1+y_1, -3x_1-y_1+z_1, x_1-z_1)+\lambda(2x_2+y_2, -3x_2-y_2+z_2, x_2-z_2) \\ & \quad = f(x_1,y_1,z_1)+\lambda f(x_2,y_2,z_2) \end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ d'où f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(b) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} f \circ f(x,y,z) &= f(2x+y, -3x-y+z, x-z) \\ &= (2(2x+y)-3x-y+z, -3(2x+y)-(-3x-y+z)+x-z, 2x+y-(x-z)) \\ &= (x+y+z, -2x-2y-2z, x+y+z)\,. \end{aligned}$$

Calculons à présent, $f^3(x, y, z) = f(x + y + z, -2x - 2y - 2z, x + y + z) = (0, 0, 0)$ donc f est nilpotent dont l'indice de nilpotence est égal à 3.

(c) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) = \mathrm{Vect}\,((2,-3,1), (1,-1,0), (0,1,-1))$.
Or $(2,-3,1) = 2(1,-1,0) - (0,1,-1)$ d'où $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,((1,-1,0), (0,1,-1))$.
Par ailleurs, $\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (2x+y, -3x-y+z, x-z) = (0,0,0)\}$ i.e.
$\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = z, y = -2x\} = \{(x,-2x,x), x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,((1,-2,1))$.

(d) On a $(1,-2,1) = (1,-1,0) - (0,1,-1)$ donc $(1,-2,1) \in \mathrm{Im}(f)$ d'où $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.

(e) On remarque que $\mathcal{S}$ est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire. D'après la question précédente, $\mathcal{S}$ est non vide. De plus, $f(0,1,-1) = (1,-2,1)$ d'où $v_0 := (1,-2,1) \in \mathcal{S}$.
Ainsi $\mathcal{S} = \{v_0 + v, v \in \mathrm{Ker}(f)\} = \{(0,1,-1) + t(1,-2,1), t \in \mathbb{R}\} = \{(t, -2t+1, t-1), t \in \mathbb{R}\}$

3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\mathrm{Ker}(f^k) = \{P \in \mathbb{C}[X], P^{(k)} = 0\} = \mathbb{C}_{k-1}[X] \neq \{0_{\mathbb{C}[X]}\}$ donc f^k n'est pas injective.

(b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Notons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Posons $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$. On a $Q \in \mathbb{C}[X]$.

De plus, $f(Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = P$ donc f est surjective.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(f^{k+1}) = f^k(f(\mathbb{C})) = f^k(\mathbb{C}) = \mathrm{Im}(f^k)$ donc $\mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^0) = \mathbb{C}[X]$.

(d) Par l'absurde, supposons que f est nilpotent. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ par conséquent $\mathrm{Im}(f^n) = \{0_{\mathbb{C}[X]}\}$. Absurde avec la question précédente.

4. Soit f un endomorphisme nilpotent de E. On note p son indice de nilpotence.

(a) Soit $k \in [\![p, +\infty[\![$, $f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$. D'où $\mathrm{Ker}(f^k) = E$ et $\mathrm{Im}(f^k) = \{0_E\}$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^k)$. On a $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(f^{k+1})$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x) = f^k(\underbrace{f(x)}_{\in E}) \in \mathrm{Im}(f^k)$.

D'où $\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$.

i. Supposons que $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1})$. D'après la question précédente, $\mathrm{Ker}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+2})$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^{k+2})$ alors $f(x) \in \mathrm{Ker}(f^{k+1}) = \mathrm{Ker}(f^k)$ d'où $f^{k+1}(x) = 0$ i.e. $x \in \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.

ii. Supposons que $\mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^{k+1})$. D'après la question précédente, $\mathrm{Im}(f^{k+2}) \subset \mathrm{Im}(f^{k+1})$. Soit $y \in \mathrm{Im}(f^{k+1})$, $\exists x \in E$, $y = f^{k+1}(x)$. On a $f^k(x) \in \mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^{k+1})$ d'où $\exists z \in E$, $f^k(x) = f^{k+1}(z)$. En composant par f, on obtient $y = f^{k+2}(z) \in \mathrm{Im}(f^{k+2})$.

(d) Par l'absurde supposons qu'il existe $k \in [\![0\,;p-1]\!]$ tel que $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1})$. D'après la question précédente, $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1}) = \mathrm{Ker}(f^{k+2}) = \cdots = \mathrm{Ker}(f^p) = E$. Absurde car p est l'indice de nilpotence de f et donc $f^k \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. Raisonnement analogue pour les parties imaginaires, donc les inclusions sont strictes pour tout $k \in [\![0\,;p-1]\!]$.

(e) On suppose de plus que E est de dimension finie. On a $\{0_E\} = \mathrm{Ker}(f^0) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}(f^p) = E$, en passant aux dimensions $0 < \cdots < \dim(E)$. On a donc $p+1$ entiers naturels distincts dans $[\![0, \dim(E)]\!]$ d'où $\dim(E) \geqslant p$.

5. Soient f et g des endomorphismes nilpotents de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Notons p et q les indices de nilpotence de f et g respectivement. D'après le binôme de Newton, comme f et g commutent,

$$(f+g)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{n}{k} f^k g^{n-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} f^k \underbrace{g^{n-k}}_{=0_{\mathscr{L}(E)}} + \sum_{k=p+1}^{p+q} \binom{n}{k} \underbrace{f^k}_{=0_{\mathscr{L}(E)}} g^{n-k} = 0_{\mathscr{L}(E)}\,.$$

Donc $f+g$ est nilpotent.

6. Soit f un endomorphisme nilpotent de E. Notons p son indice de nilpotence. On remarque que

$$\mathrm{id} = \mathrm{id}^p - f^p \underset{\mathrm{id} \circ f = f \circ \mathrm{id}}{=} (\mathrm{id} - f) \left(\sum_{k=0}^{p-1} f^k \mathrm{id}^{n-1-k} \right) = (\mathrm{id} - f) \left(\sum_{k=0}^{p-1} f^k \right)$$

De même, $\mathrm{id} = \left(\sum_{k=0}^{p-1} f^k \right) (\mathrm{id} - f)$. Par conséquent, $\mathrm{id} - f$ est un automorphisme et $(\mathrm{id} - f)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} f^k$.